



Γ. Αραμπατζής

## Διαγώνισμα Προόδου 10.05.2025

### Ερώτηση 1: [30 = 10 + 10 + 10]

Ένα κουτί περιέχει  $N$  άσπρες και  $M$  μαύρες μπάλες. Αφαιρείτε τυχαία μία μπάλα και καταγράφετε το χρώμα της χωρίς να την επιστρέψετε στο κουτί, μέχρι να αφαιρέσετε όλες τις μπάλες.

α') Ποια είναι η πιθανότητα η  $k$  μπάλα που αφαιρέσατε να είναι άσπρη;

1ος τρόπος: Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος που περιέχει όλες τις ακολουθίες μήκους  $k$  από  $N$  άσπρες και  $M$  μαύρες μπάλες. Το μέγεθος του  $\Omega$  είναι  $|\Omega| = (M+N)(M+N-1)\cdots(M+N-k+1) = \frac{(N+M)!}{(N+M-k)!}$ . Έστω  $A$  το ενδεχόμενο ότι η  $k$  μπάλα είναι άσπρη. Το μέγεθος του  $A$  είναι  $|A| = \frac{N(N+M-1)!}{(N+M-k)!}$ . Τελικά,  $P(A) = \frac{N}{N+M}$ .

2ος τρόπος: Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος που περιέχει όλες τις ακολουθίες μήκους  $N+M$  από άσπρες και μαύρες μπάλες. Το μέγεθος του  $\Omega$  είναι  $|\Omega| = \binom{N+M}{N}$ , όπου μετράμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε  $N$  θέσεις από  $N+M$  για να τοποθετήσουμε τις άσπρες μπάλες. Έστω  $A$  το ενδεχόμενο ότι η  $k$  μπάλα είναι άσπρη. Το μέγεθος του  $A$  είναι  $|A| = \binom{N+M-1}{N}$ . Τελικά,  $P(A) = \frac{N}{N+M}$ .

β') Δείξτε ότι η πιθανότητα η πρώτη άσπρη μπάλα να αφαιρεθεί στην  $k$ -οστή φορά είναι ίση με  $\binom{N+M-k}{N-1} / \binom{N+M}{N}$ .

Παρατηρούμε ότι εάν  $k = M+1$  τότε η πιθανότητα είναι 1 και εάν  $k > M+1$  τότε η πιθανότητα είναι 0. Συνεχίζουμε για  $k < M$ .

1ος τρόπος: Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\binom{N+M-k}{N-1}}{\binom{N+M}{N}} = \frac{M}{N+M} \frac{M-1}{N+M-1} \cdots \frac{M-k}{N+M-(k-2)} \frac{N}{N+M-(k-1)},$$

όπου ο 1ος όρος είναι η πιθανότητα να είναι μαύρη η πρώτη μπάλα, ο δεύτερος όρος είναι η πιθανότητα να είναι μαύρη η δεύτερη μπάλα, κ.ο.κ., και ο τελευταίος όρος είναι η πιθανότητα η  $k$  μπάλα να είναι άσπρη.

2ος τρόπος: Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε  $k-1$  μαύρες μπάλες στις  $k-1$  πρώτες θέσεις, 1 άσπρη μπάλα στην  $k$  θέση και τις υπόλοιπες  $N-1$  άσπρες στις τελευταίες  $N+M-k$  θέσεις είναι  $\binom{N+M-k}{N-1}$ , που δίνει το ζητούμενο.

γ') Δοσμένου ότι η  $k$  μπάλα είναι άσπρη, υπολογίστε την πιθανότητα τουλάχιστον μία άσπρη να έχει εμφανιστεί πριν την  $k$ -οστή φορά, σε σχέση με τον αριθμό  $M$ .

Έστω  $A$  το ενδεχόμενο η  $k$  μπάλα να είναι άσπρη και  $B$  το ενδεχόμενο τουλάχιστον μία άσπρη μπάλα να υπάρχει στις θέσεις 1 έως  $k-1$ . Τότε,

$$P(B|A) = 1 - P(B^c|A) = 1 - \frac{P(B^c \cap A)}{P(A)}.$$

Η πιθανότητα  $P(A)$  υπολογίστηκε στο πρώτο ερώτημα και η  $P(B^c \cap A)$  στο δεύτερο ερώτημα.

### Ερώτηση 2: [30 = 10 + 10 + 10]

Υπάρχουν 2 δρόμοι για να πάει κανείς από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$ , και 2 δρόμοι για να πάει από το σημείο  $B$  στο σημείο  $\Gamma$ . Κάθε ένας από τους 4 δρόμους έχει πιθανότητα  $p$  να είναι κλειστός, ανεξάρτητα από τους άλλους.

Συμβολίζουμε με 0 και 1 τον κλειστό και ανοιχτό δρόμο, αντίστοιχα. Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο,

$$\Omega = \{x_1 x_2 x_3 x_4 : x_i \in \{0, 1\}\}.$$

Έστω

$$A \leftrightarrow B = \{01ij : i, j \in \{0, 1\}\} \cup \{10ij : i, j \in \{0, 1\}\} \cup \{11ij : i, j \in \{0, 1\}\},$$

το ενδεχόμενο να υπάρχει ανοιχτός δρόμος από το  $A$  στο  $B$  και  $A \nleftrightarrow B$  η άρνηση του.

α') Βρείτε την πιθανότητα να υπάρχει ανοιχτή διαδρομή από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$ , δεδομένου ότι δεν υπάρχει ανοιχτή διαδρομή από το σημείο  $B$  στο σημείο  $\Gamma$ .

$P(A \leftrightarrow B | B \nleftrightarrow \Gamma) = P(A \leftrightarrow B) = 1 - P(A \nleftrightarrow B) = 1 - p^2$  επειδή τα ενδεχόμενα  $A \leftrightarrow B$  και  $B \nleftrightarrow \Gamma$  είναι ανεξάρτητα.

β') Βρείτε την πιθανότητα να υπάρχει ανοιχτή διαδρομή από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$ , δεδομένου ότι δεν υπάρχει ανοιχτή διαδρομή από το σημείο  $A$  στο σημείο  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned} P(A \leftrightarrow B | A \nleftrightarrow \Gamma) &= \frac{P(A \leftrightarrow B \cap A \nleftrightarrow \Gamma)}{P(A \nleftrightarrow \Gamma)} \\ &= \frac{P(A \leftrightarrow B \cap B \nleftrightarrow \Gamma)}{1 - P(A \leftrightarrow \Gamma)} \\ &= \frac{P(A \leftrightarrow B)P(B \nleftrightarrow \Gamma)}{1 - P(A \leftrightarrow B)P(B \leftrightarrow \Gamma)} \\ &= \frac{(1 - p^2)p^2}{1 - (1 - p^2)^2}. \end{aligned}$$

γ') Έστω ότι υπάρχει ένας δρόμος από το σημείο  $A$  κατευθείαν στο σημείο  $\Gamma$ . Υπολογίστε την πιθανότητα του προηγούμενου ερωτήματος. Συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα και δώστε μια εξήγηση.

Έστω  $E$  το ενδεχόμενο να είναι ανοιχτός ο δρόμος εξπρές από το  $A$  στο  $\Gamma$ . Τότε,

$$\begin{aligned} P(A \nleftrightarrow \Gamma) &= 1 - P(A \leftrightarrow \Gamma) \\ &= 1 - P(A \leftrightarrow \Gamma | E)P(E) - P(A \leftrightarrow \Gamma | E^c)P(E^c) \\ &= 1 - (1 - p) - P(A \leftrightarrow B)P(B \leftrightarrow \Gamma)p \\ &= (1 - p^2)^2p - p \\ &= \left(1 - (1 - p^2)^2\right)p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \leftrightarrow B | A \nleftrightarrow \Gamma) &= \frac{P(A \leftrightarrow B)P(B \nleftrightarrow \Gamma)}{P(A \nleftrightarrow \Gamma)} \\ &= \frac{(1 - p^2)p^3}{(1 - (1 - p^2)^2)p} \\ &= \left(1 - (1 - p^2)^2\right)p. \end{aligned}$$

### Ερώτηση 3: [30 = 15 + 15]

Ένα καλάθι περιέχει 20 μήλα από τα οποία τα 5 είναι σάπια. Δίνετε σε έναν φίλο σας 5 μήλα τυχαία χωρίς να τα ελέγξετε. Στη συνέχεια, παίρνετε ένα μήλο τυχαία από το καλάθι και το ελέγχετε.

α') Ποια είναι η πιθανότητα το μήλο να είναι σάπιο;

1ος τρόπος: Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος που περιέχει όλες τις ακολουθίες μήκους  $k = 6$  από  $M = 15$  καλά και  $N = 5$  σάπια μήλα. Το μέγεθος του  $\Omega$  είναι  $|\Omega| = (M + N)(M + N - 1) \cdots (M + N - k + 1) = \frac{(N+M)!}{(N+M-k)!}$ . Έστω  $A$  το ενδεχόμενο ότι το  $k$  μήλο είναι σάπιο. Το μέγεθος του  $A$  είναι  $|A| = \frac{N(N+M-1)!}{(N+M-k)!}$ . Τελικά,  $P(A) = \frac{N}{N+M} = \frac{1}{4}$ .

2ος τρόπος: Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος που περιέχει όλες τις ακολουθίες μήκους  $N + M = 20$  από  $M = 15$  καλά και  $N = 5$  σάπια μήλα. Το μέγεθος του  $\Omega$  είναι  $|\Omega| = \binom{N+M}{N}$ , όπου μετράμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε  $N$  θέσεις από  $N + M$  για να τοποθετήσουμε τα σάπια μήλα. Έστω  $A$  το ενδεχόμενο ότι το  $k$  μήλο είναι χαλασμένο. Το μέγεθος του  $A$  είναι  $|A| = \binom{N+M-1}{N}$ . Τελικά,  $P(A) = \frac{N}{N+M} = \frac{1}{4}$ .

β') Δεδομένου ότι το μήλο που πήρατε είναι σάπιο, ποια είναι η πιθανότητα ότι δώσατε τουλάχιστον ένα σάπιο μήλο στον φίλο σας;

Έστω  $A$  το ενδεχόμενο το  $k$  μήλο να είναι σάπιο και  $B$  το ενδεχόμενο τουλάχιστον ένα σάπιο μήλο να υπάρχει στις θέσεις 1 έως  $k-1$ . Τότε,

$$P(B|A) = 1 - P(B^c|A) = 1 - \frac{P(B^c \cap A)}{P(A)}.$$

Η πιθανότητα  $P(A)$  υπολογίστηκε στο πρώτο ερώτημα. Για να υπολογίσουμε την  $P(B^c \cap A)$ , δηλαδή την πιθανότητα να έχουμε το πρώτο σάπιο μήλο την  $k = 6$  φορά, έχουμε δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Η πιθανότητα δίνεται από το γινόμενο της πιθανότητας να μην είναι σάπιο το πρώτο μήλο, της πιθανότητας να μην είναι σάπιο το δεύτερο μήλο, κ.ο.κ., και τέλος της πιθανότητας το  $k$  μήλο να είναι σάπιο,

$$P(B^c \cap A) = \frac{M}{N+M} \frac{M-1}{N+M-1} \cdots \frac{M-k}{N+M-(k-2)} \frac{N}{N+M-(k-1)} = \frac{\binom{N+M-k}{N-1}}{\binom{N+M}{N}}.$$

2ος τρόπος: Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε  $k-1$  καλά μήλα στις  $k-1$  πρώτες θέσεις, ένα σάπιο μήλο στην  $k$  θέση και τα υπόλοιπα  $N-1$  σάπια στις τελευταίες  $N+M-k$  θέσεις είναι  $\binom{N+M-k}{N-1}$ . Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε  $N$  καλά μήλα σε  $N+M$  θέσεις είναι  $\binom{N+M}{N}$ . Τελικά,

$$P(B^c \cap A) = \frac{\binom{N+M-k}{N-1}}{\binom{N+M}{N}}.$$

#### Ερώτηση 4: [10]

Δείξτε ότι αν  $P(A|B) = 1$  τότε  $P(B^c|A^c) = 1$ .

$$\begin{aligned} P(B^c|A^c) &= \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} \\ &= \frac{P((A \cup B)^c)}{P(A^c)} \\ &= \frac{1 - P(A \cup B)}{P(A^c)} \\ &= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{P(A^c)} \\ &= \frac{P(A^c) - P(B) + P(A \cap B)}{P(A^c)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί  $P(A|B) = 1 \Rightarrow P(B) = P(A \cap B)$ .

## Πληροφορίες

- Δίνονται συνολικά 100 μονάδες. Το μέγιστο σκορ είναι το 100.
- Το διαγώνισμα διαρκεί 150 λεπτά.
- Αιτιολογήστε καθαρά τις απαντήσεις σας. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν θεωρούνται σωστές.