



Γ. Αραμπατζής

Διαγώνισμα Ιουνίου 06.06.2025

Ερώτηση 1: [10 + 10]

Σε ένα κουτί υπάρχουν $n+1$ νομίσματα. Το νόμισμα i φέρνει κορώνα με πιθανότητα $\frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$. Διαλέγετε ένα νόμισμα στην τύχη και το στρίβετε.

Έστω A_i το ενδεχόμενο να διαλέξω το κέρμα i και K το ενδεχόμενο να έρθει κορώνα. Είναι δεδομένο ότι $\mathbb{P}(K | A_i) = \frac{i}{n}$, $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n+1}$.

α') Να δείξετε ότι η πιθανότητα να έρθει κορώνα είναι $\frac{1}{2}$.

Εφόσον τα A_i είναι ξένα και η ένωση τους μας δίνει το δειγματικό χώρο, από το θεώρημα της ολικής πιθανότητας ισχύει ότι,

$$\mathbb{P}(K) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(K | A_i) \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

β') Με δεδομένο ότι ήρθε κορώνα, να υπολογίσετε την πιθανότητα να διαλέξατε το κέρμα i .

Από το θεώρημα του Bayes,

$$\mathbb{P}(A_i | K) = \frac{\mathbb{P}(K | A_i) \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(K)} = \frac{\frac{i}{n} \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2i}{n(n+1)}. \quad (2)$$

Ερώτηση 2: [10+10+10]

Σε ένα κουτί υπάρχουν τρεις άσπρες και τέσσερις κόκκινες μπάλες. Διάλεγετε τυχαία τρεις μπάλες. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις στην περίπτωση που η σειρά που τις τοποθετούμε δεν παίζει ρόλο, και στην περίπτωση που παίζει ρόλο.

Έστω $W = \{W_1, W_2, W_3\}$ το σύνολο που περιέχει όλες τις άσπρες μπάλες, $R = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ το σύνολο που περιέχει όλες τις κόκκινες μπάλες, $B = W \cup R$ το σύνολο που περιέχει όλες τις μπάλες.

α') Να ορίσετε τον δειγματικό χώρο και να βρείτε το μέγεθος του.

Χωρίς σειρά: Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο,

$$\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \mid \omega_i \in B, \omega_i \neq \omega_j\}, \quad (3)$$

με $|\Omega| = \binom{7}{3}$.

Με σειρά: Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο,

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_i \in B, \omega_i \neq \omega_j\}, \quad (4)$$

με $|\Omega| = 7 \cdot 6 \cdot 5$.

β') Έστω A το ενδεχόμενο να διαλέξουμε τουλάχιστον μία άσπρη μπάλα. Να ορίσετε το ενδεχόμενο ως υποσύνολο του δειγματικού χώρου και να βρείτε την πιθανότητα του.

Χωρίς σειρά: Το ενδεχόμενο είναι το σύνολο A^c όπου,

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \in R, i = 1, 2, 3\}. \quad (5)$$

Επειδή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά έχουμε ότι,

$$|A| = \binom{4}{3}, \quad (6)$$

διότι τόσοι είναι οι τρόποι που μπορώ να διαλέξω 3 κόκκινες μπάλες από 4 κόκκινες χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά, και

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (7)$$

Με σειρά: Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση με την διαφορά ότι,

$$|A| = 4 \cdot 3 \cdot 2, \quad (8)$$

διότι τόσοι είναι οι τρόποι που μπορώ να βάλω σε σειρά 3 κόκκινες μπάλες από 4 κόκκινες.

γ') Έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία μετράει τον αριθμό από άσπρες μπάλες. Να ορίσετε την τυχαία μεταβλητή ως συνάρτηση, περιγράφοντας το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών. Να βρεθεί η πιθανότητα της κάθε τιμής της X .

Έστω A_i , $i = 0, 1, 2, 3$ το ενδεχόμενο να διαλέξουμε i άσπρες μπάλες. Τότε,

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = i\}) = \mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (9)$$

Χωρίς σειρά:

$$|A_i| = \binom{3}{i} \binom{4}{3-i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (10)$$

διότι για να διαλέξω 3 μπάλες από τις οποίες i είναι άσπρες μπάλες και $3-i$ κόκκινες, έχω $\binom{3}{i}$ τρόπους να διαλέξω τις άσπρες και $\binom{4}{3-i}$ να διαλέξω τις κόκκινες.

Με σειρά: Το μέγεθος του ενδεχομένου A_0 (όλες κόκκινες) είναι ίσο με

$$|A_0| = \binom{3}{0} 4 \cdot 3 \cdot 2, \quad (11)$$

διότι με $\binom{3}{0} = 1$ τρόπους επιλέγω τις θέσεις που θα τοποθετήσω τις άσπρες μπάλες, που είναι ίσο με ένα γιατί δεν τοποθετώ καμία άσπρη μπάλα, επί 4 (τόσες επιλογές υπάρχουν για τη θέση της πρώτης κόκκινης), επί 3 (τόσες επιλογές υπάρχουν για τη θέση της δεύτερης κόκκινης), επί 2 (τόσες επιλογές υπάρχουν για τη θέση της τρίτης κόκκινης).

Το μέγεθος του ενδεχομένου A_1 (μία άσπρη) είναι ίσο με

$$|A_1| = \binom{3}{1} 3 \cdot 4 \cdot 3, \quad (12)$$

διότι με $\binom{3}{1} = 3$ τρόπους επιλέγω τις θέσεις που θα τοποθετήσω την άσπρη μπάλα, επί 3 (τόσες επιλογές έχω για την θέση της άσπρης μπάλας), επί 4 (τόσες επιλογές έχω για την μία θέση της κόκκινης μπάλας), επί 3 (τόσες επιλογές έχω για την δεύτερη θέση της κόκκινης μπάλας).

Αντίστοιχα υπολογίζονται και τα A_2 και A_3 ,

$$|A_2| = \binom{3}{2} 3 \cdot 2 \cdot 4, \quad (13)$$

$$|A_3| = \binom{3}{3} 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad (14)$$

Ερώτηση 3: [10 + 10]

Έστω ότι X_1 και X_2 είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n_1 , p_1 και n_2 , p_2 αντίστοιχα.

α') Περιγράψτε ποια ποσότητα περιγράφει μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί διωνυμική κατανομή. Να απόδειξετε χρησιμοποιώντας συνδυαστικά επιχειρήματα ότι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X_1 είναι,

$$p(k; n_1, p_1) = \binom{n_1}{k} p_1^k (1 - p_1)^{n_1 - k}, \quad k = 0, \dots, n_1.$$

Η τυχαία μεταβλητή X_1 που ακολουθεί διωνυμική κατανομή, μετράει τον αριθμό των επιτυχιών σε n_1 ανεξάρτητες δοκιμές με πιθανότητα επιτυχίας της κάθε δοκιμής ίση με p_1 . Ισχύει ότι $\mathbb{P}(X_1 = k) = p(k, n_1, p_1)$.

Από τις n_1 δοκιμές υπάρχουν $\binom{n_1}{k}$ τρόποι που μπορούμε να διαλέξουμε τις θέσεις των k επιτυχημένων δοκιμών. Οι k επιτυχίες έχουν πιθανότητα p_1^k , και οι $1 - k$ αποτυχίες έχουν πιθανότητα $(1 - p_1)^{n_1 - k}$. Η συνολική πιθανότητα είναι το γινόμενο τους γιατί οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες.

β') Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X_1 X_2 = 0)$.

Πρώτος τρόπος: Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\{X_1 X_2 = 0\} &= \{X_1 = 0, X_2 \geq 0\} \cup \{X_1 \geq 0, X_2 = 0\} \\ &= A_1 \cup A_2,\end{aligned}\quad (15)$$

όπου $A_1 = \{X_1 = 0, X_2 \geq 0\}$ και $A_2 = \{X_1 \geq 0, X_2 = 0\}$. Επειδή $A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = 0, X_2(\omega) = 0\} \neq \emptyset$, ισχύει ότι,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 X_2 = 0) &= \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 \geq 0) + \mathbb{P}(X_1 \geq 0)\mathbb{P}(X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0) \\ &= p(0; n_1, p_1) + p(0; n_2, p_2) - p(0; n_1, p_1)p(0; n_2, p_2) \\ &= (1 - p_1)^{n_1} + (1 - p_2)^{n_2} + (1 - p_1)^{n_1}(1 - p_2)^{n_2},\end{aligned}\quad (16)$$

λόγω ανεξαρτησίας των X_1 και X_2 και διότι $\mathbb{P}(X_1 \geq 0) = \mathbb{P}(X_2 \geq 0) = 1$.

Δεύτερος τρόπος: Ισχύει ότι

$$\{X_1 X_2 = 0\} = \{X_1 = 0, X_2 \neq 0\} \cup \{X_1 \neq 0, X_2 = 0\} \cup \{X_1 = 0, X_2 = 0\}, \quad (17)$$

όπου τα ενδεχόμενα στο δεξί μέρος της ισότητας είναι ξένα ανά δύο. Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 X_2 = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 \neq 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq 0, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) \\ &= p(0; n_1, p_1) \sum_{k=1}^{n_2} p(k; n_2, p_2) + p(0; n_2, p_2) \sum_{k=1}^{n_1} p(k; n_1, p_1) + p(0; n_1, p_1)p(0; n_2, p_2) \\ &= p(0; n_1, p_1) \sum_{k=0}^{n_2} p(k; n_2, p_2) + p(0; n_2, p_2) \sum_{k=0}^{n_1} p(k; n_1, p_1) - p(0; n_1, p_1)p(0; n_2, p_2) \\ &= p(0; n_1, p_1) + p(0; n_2, p_2) + p(0; n_1, p_1)p(0; n_2, p_2) \\ &= (1 - p_1)^{n_1} + (1 - p_2)^{n_2} + (1 - p_1)^{n_1}(1 - p_2)^{n_2}.\end{aligned}\quad (18)$$

Ερώτηση 4: [20]

Έστω X_1, X_2, X_3 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής είναι ίση με 1 για τιμές της X στο $[0, 1]$ και 0 αλλού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η μεγαλύτερη από τις τρεις να είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο.

Το ενδεχόμενο του οποίου την πιθανότητα θέλουμε να υπολογίσουμε γράφεται ως,

$$\begin{aligned}A &= \{X_1 < X_2 + X_3, X_1 > X_2, X_1 > X_3\} \cup \\ &\quad \{X_2 < X_1 + X_3, X_2 > X_1, X_2 > X_3\} \cup \\ &\quad \{X_3 < X_1 + X_2, X_3 > X_1, X_3 > X_2\} \\ &= A_1 \cup A_2 \cup A_3.\end{aligned}\quad (19)$$

Επειδή τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους, ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = 3\mathbb{P}(A_1), \quad (20)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω συμμετρίας του προβλήματος. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A_1 .

Για κάθε μία από τις τ.μ. έχουμε ότι η μεγαλύτερη από όλες, η X_1 εδώ, μπορεί να ανήκει οπουδήποτε στο $[0, 1]$. Η X_2 είναι σίγουρα μικρότερη από την X_1 και μεγαλύτερη από το 0, άρα ανήκει στο διάστημα $[0, X_1]$. Για την X_3 έχουμε ότι $X_3 > X_1 - X_2$ και $X_3 < X_1$, άρα ανήκει στο διάστημα $[X_1 - X_2, X_1]$. Επομένως,

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2 + X_3) = \int_0^1 \int_0^{x_1} \int_{x_1 - x_2}^{x_1} 1 \, dx_3 \, dx_2 \, dx_1 = \dots = \frac{1}{6}. \quad (21)$$

Επομένως, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.

Ερώτηση 5: [10 + 20]

Έστω X, Y συνεχής τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}$.

α') Να δείξετε ότι $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X|Y=y] f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \mathbb{E}[X].\end{aligned}\tag{22}$$

β') Επιβεβαιώστε την ισότητα στην περίπτωση που

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X υπολογίζεται ως,

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_x^1 2 dy \\ &= 2(1-x), \quad x \in [0,1].\end{aligned}\tag{23}$$

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y υπολογίζεται ως,

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^y 2 dx \\ &= 2y, \quad y \in [0,1].\end{aligned}\tag{24}$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $X|Y$ υπολογίζεται ως,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y}, \quad x \in [0,y].\tag{25}$$

Επομένως η $X|Y$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, Y]$ και η μέση τιμή της είναι,

$$\mathbb{E}[X|Y] = \frac{Y}{2}.\tag{26}$$

Τελικά

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] &= \int_0^1 \frac{y}{2} f_Y(y) dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{2} 2y dy \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}\tag{27}$$

Η μέση τιμή της X είναι ίση με,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_0^1 x 2(1-x) dx \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}\tag{28}$$

Πληροφορίες

- Δίνονται συνολικά 120 μονάδες. Το μέγιστο σκορ είναι 100.
- Η διάρκεια του διαγωνίσματος είναι 150 λεπτά.
- Αιτιολογήστε καθαρά τις απαντήσεις σας. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν θεωρούνται σωστές.
- Λύστε τα θέματα στο πρόχειρο και παρουσιάστε τις τελικές λύσεις καθαρογραμμένες. Απαντήσεις με μουντζούρες δεν θα βαθμολογούνται.
- Δώστε συγκεντρωμένες απαντήσεις για κάθε άσκηση. Αν προχωρήσετε στην επόμενη χωρίς να έχετε ολοκληρώσει την προηγούμενη, αφήστε επαρκή κενό χώρο σε περίπτωση που θέλετε να επιστρέψετε.