



Γ. Αραμπατζής

Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου
15.09.2025

Ερώτηση 1: [10 + 10 + 10]

Έστω

$$f(x, y) = c(x + y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (1)$$

και $f(x, y) = 0$ αλλιώς.

α') Να βρεθεί η σταθερά c ώστε η f να είναι από κοινού πυκνότητα πιθανότητας.

β') Να υπολογίσετε την υπό συνθήκη μέση τιμή $\mathbb{E}[Y | X]$.

γ') Να υπολογίσετε τη διακύμανση $\text{Var}[X]$.

Ερώτηση 2: [10 + 10 + 10]

Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή. Η μέση τιμή και η διακύμανση της X είναι 0 και 1, αντίστοιχα, και της Y , 1 και 4. Ο συντελεστής συσχέτισης της X και Y είναι ρ .

α') Να υπολογίσετε την $\text{Cov}[X, Y]$.

β') Αν $\rho = 0$, είναι οι X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε.

γ') Δώστε παράδειγμα ζεύγους τυχαίων μεταβλητών που είναι ασυσχέτιστες αλλά όχι ανεξάρτητες.

Ερώτηση 3: [5 + 5 + 5 + 5]

Ο αριθμός τηλεφωνικών κλήσεων που δέχεται ένα τηλεφωνικό κέντρο σε μία ώρα ακολουθεί την κατανομή Poisson, με παράμετρο λ . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Poisson κατανομής είναι ίση με

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

α') Ποια είναι η πιθανότητα να δεχτεί ακριβώς 3 κλήσεις μέσα σε μία ώρα;

β') Ποια είναι η πιθανότητα να δεχτεί το πολύ 2 κλήσεις σε μία ώρα;

γ') Ποια είναι η πιθανότητα να δεχτεί τουλάχιστον 5 κλήσεις σε μία ώρα;

δ') Αποδείξτε ότι η μέση τιμή και η διακύμανση του αριθμού κλήσεων είναι ίση με λ .

Ερώτηση 4: [10 + 10 + 10]

Ένας παίκτης ρίχνει διαδοχικά ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστεί δύο συνεχόμενες φορές το ίδιο αποτέλεσμα.

α') Να περιγράψετε τον δειγματικό χώρο των πρώτων τριών ρίψεων.

β') Ποια είναι η πιθανότητα το παιχνίδι να τελειώσει στη δεύτερη ρίψη;

γ') Ποια είναι η πιθανότητα το παιχνίδι να τελειώσει στην τρίτη ρίψη;

Πληροφορίες

- Δίνονται συνολικά 110 μονάδες, το μέγιστο σκορ είναι 100.
- Η διάρκεια του διαγωνίσματος είναι 120 λεπτά.
- Αιτιολογήστε καθαρά τις απαντήσεις σας. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν θεωρούνται σωστές.
- Λύστε τα θέματα στο πρόχειρο και παρουσιάστε τις τελικές λύσεις καθαρογραμμένες. Απαντήσεις με μουντζούρες δεν θα βαθμολογούνται.
- Δώστε συγκεντρωμένες απαντήσεις για κάθε άσκηση. Αν προχωρήσετε στην επόμενη χωρίς να έχετε ολοκληρώσει την προηγούμενη, αφήστε επαρκή κενό χώρο σε περίπτωση που θέλετε να επιστρέψετε.