



Γ. Αραμπατζής

Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου 31.08.2026

Ερώτηση 1: [10 + 10 + 10]

Σε μια εξέταση πολλαπλής επιλογής κάθε ερώτηση έχει m πιθανές απαντήσεις, από τις οποίες ακριβώς μία είναι σωστή. Ένας φοιτητής γνωρίζει την απάντηση σε μια ερώτηση με πιθανότητα p . Αν δεν τη γνωρίζει, επιλέγει στην τύχη μία από τις m απαντήσεις με ίσες πιθανότητες.

α') Να ορίσετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος και να υπολογίσετε την πιθανότητα κάθε δείγματος.

Κάθε αποτέλεσμα του πειράματος περιγράφεται από δύο χαρακτηριστικά: αν ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση (γ) ή δεν τη γνωρίζει (δ), και αν τελικά απαντά σωστά (σ) ή λάθος (λ). Ο δειγματικός χώρος είναι

$$\Omega = \{ (\gamma, \sigma), (\gamma, \lambda), (\delta, \sigma), (\delta, \lambda) \}. \quad (1)$$

Η πιθανότητα κάθε δείγματος προκύπτει από τον πολλαπλασιαστικό κανόνα: η πρώτη συνιστώσα έχει πιθανότητα p για το γ και $1 - p$ για το δ , και η πιθανότητα της δεύτερης εξαρτάται από την πρώτη. Αν ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση, απαντά σωστά με βεβαιότητα. Αν μαντεύει, απαντά σωστά με πιθανότητα $\frac{1}{m}$ (μία σωστή από m ισοπίθανες επιλογές) και λάθος με πιθανότητα $\frac{m-1}{m}$.

ω	$\mathbb{P}(\{\omega\})$	περιγραφή
(γ, σ)	$p \cdot 1 = p$	γνωρίζει, σωστά
(γ, λ)	$p \cdot 0 = 0$	γνωρίζει, λάθος (αδύνατο)
(δ, σ)	$(1 - p) \cdot \frac{1}{m} = \frac{1 - p}{m}$	μαντεύει, σωστά
(δ, λ)	$(1 - p) \cdot \frac{m - 1}{m} = \frac{(1 - p)(m - 1)}{m}$	μαντεύει, λάθος

β') Έστω C το ενδεχόμενο ο φοιτητής να απαντήσει σωστά. Να ορίσετε το ενδεχόμενο ως υποσύνολο του δειγματικού χώρου και να υπολογίσετε την πιθανότητά του.

Το ενδεχόμενο 'ο φοιτητής απαντά σωστά' αποτελείται από τα δείγματα με δεύτερη συνιστώσα σ :

$$C = \{ (\gamma, \sigma), (\delta, \sigma) \}. \quad (2)$$

Αθροίζουμε τις πιθανότητες των δειγμάτων που ανήκουν στο C :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{(\gamma, \sigma)\}) + \mathbb{P}(\{(\delta, \sigma)\}) = p + \frac{1 - p}{m} = \frac{mp + 1 - p}{m}. \quad (3)$$

γ') Δεδομένου ότι ο φοιτητής απάντησε σωστά, να υπολογίσετε την πιθανότητα να γνώριζε πραγματικά την απάντηση.

Έστω $K = \{ (\gamma, \sigma), (\gamma, \lambda) \}$ το ενδεχόμενο 'ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση' (δείγματα με πρώτη συνιστώσα γ). Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας,

$$\mathbb{P}(K | C) = \frac{\mathbb{P}(K \cap C)}{\mathbb{P}(C)}. \quad (4)$$

Είναι $K \cap C = \{ (\gamma, \sigma) \}$, άρα $\mathbb{P}(K \cap C) = p$, και με την $\mathbb{P}(C)$ από το προηγούμενο ερώτημα,

$$\mathbb{P}(K | C) = \frac{p}{p + \frac{1 - p}{m}} = \frac{mp}{mp + 1 - p}. \quad (5)$$

Ερώτηση 2: [10 + 10 + 10]

Από μια κανονική τράπουλα 52 φύλλων, η οποία περιέχει 4 άσσους, μοιράζουμε τυχαία 5 φύλλα (η σειρά δεν παίζει ρόλο).

Έστω D το σύνολο των 52 φύλλων και $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\} \subseteq D$ το σύνολο των 4 άσσων.

α') Να ορίσετε τον δειγματικό χώρο και να βρείτε το μέγεθός του.

Επειδή η σειρά δεν παίζει ρόλο, ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο όλων των πεντάδων φύλλων,

$$\Omega = \{\{\omega_1, \dots, \omega_5\} \mid \omega_i \in D, \omega_i \neq \omega_j \text{ για } i \neq j\}, \quad (6)$$

με $|\Omega| = \binom{52}{5}$, όσοι οι τρόποι να επιλέξουμε 5 φύλλα από 52.

β') Έστω A το ενδεχόμενο να υπάρχει τουλάχιστον ένας άσος στα 5 φύλλα. Να ορίσετε το ενδεχόμενο ως υποσύνολο του δειγματικού χώρου και να υπολογίσετε την πιθανότητά του.

Το ενδεχόμενο είναι

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \cap E \neq \emptyset\}. \quad (7)$$

Υπολογίζουμε μέσω του συμπληρώματος $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \cap E = \emptyset\}$, δηλαδή του ενδεχομένου όλα τα φύλλα να επιλεγούν από τα $52 - 4 = 48$ μη-άσσους:

$$|A^c| = \binom{48}{5}, \quad (8)$$

οπότε

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 1 - \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0.341. \quad (9)$$

γ') Έστω X τυχαία μεταβλητή που μετράει τον αριθμό των άσσων στα 5 φύλλα. Να ορίσετε την τυχαία μεταβλητή ως συνάρτηση, περιγράφοντας το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών, και να βρείτε την πιθανότητα κάθε τιμής της X .

Η τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ορίζεται ως $X(\omega) = |\omega \cap E|$, ο αριθμός των άσσων στην πεντάδα ω .

Για $k = 0, 1, 2, 3, 4$, το ενδεχόμενο $\{X = k\}$ αντιστοιχεί στην επιλογή k φύλλων από τους 4 άσσους και $5 - k$ φύλλων από τους 48 μη-άσσους, οπότε

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{48}{5-k}}{\binom{52}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

Ερώτηση 3: [10 + 10]

Ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών σε μία σελίδα ενός βιβλίου ακολουθεί την κατανομή Poisson, με παράμετρο λ . Ο αριθμός των λαθών σε διαφορετικές σελίδες είναι ανεξάρτητος. Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Poisson κατανομής είναι

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

α') Να υπολογίσετε την πιθανότητα μια σελίδα να έχει τουλάχιστον ένα λάθος.

Έστω X ο αριθμός των λαθών σε μια σελίδα. Τότε

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = 1 - e^{-\lambda}. \quad (12)$$

β') Ένα κεφάλαιο έχει 12 σελίδες. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ακριβώς 2 από τις 12 σελίδες να μην έχουν κανένα λάθος.

Υπόδειξη: Χαρακτηρίστε κάθε σελίδα ως 'επιτυχία' αν δεν έχει κανένα λάθος. Ποια είναι η πιθανότητα επιτυχίας για μία σελίδα, και ποια κατανομή ακολουθεί ο αριθμός των επιτυχιών στις 12 ανεξάρτητες σελίδες;

Κάθε σελίδα, ανεξάρτητα από τις άλλες, δεν έχει κανένα λάθος με πιθανότητα

$$q = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}. \quad (13)$$

Έστω N ο αριθμός των σελίδων χωρίς λάθος ανάμεσα στις 12. Επειδή οι σελίδες είναι ανεξάρτητες και καθεμία έχει την ίδια πιθανότητα q να είναι χωρίς λάθος, η N ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους 12 και q . Επομένως,

$$\mathbb{P}(N=2) = \binom{12}{2} q^2 (1-q)^{10} = 66 e^{-2\lambda} (1 - e^{-\lambda})^{10}. \quad (14)$$

Ερώτηση 4: [10 + 10 + 10]

Έστω

$$f(x, y) = cxy, \quad 0 \leq x \leq y \leq 1, \quad (15)$$

και $f(x, y) = 0$ αλλιώς.

α') Να βρεθεί η σταθερά c ώστε η f να είναι από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Πρέπει $f \geq 0$ (άρα $c > 0$) και το ολοκλήρωμα πάνω στο χωρίο $\{0 \leq x \leq y \leq 1\}$ να ισούται με 1:

$$\int_0^1 \int_0^y cxy \, dx \, dy = c \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^y dy = c \int_0^1 \frac{y^3}{2} \, dy = \frac{c}{8}. \quad (16)$$

Άρα $\frac{c}{8} = 1$, οπότε $c = 8$.

β') Να υπολογίσετε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας f_X και f_Y , και την υπό συνθήκη μέση τιμή $\mathbb{E}[X | Y]$.

Για $y \in [0, 1]$, ολοκληρώνουμε ως προς x στο $[0, y]$:

$$f_Y(y) = \int_0^y 8xy \, dx = 8y \frac{y^2}{2} = 4y^3, \quad y \in [0, 1]. \quad (17)$$

Για $x \in [0, 1]$, ολοκληρώνουμε ως προς y στο $[x, 1]$:

$$f_X(x) = \int_x^1 8xy \, dy = 8x \frac{1-y^2}{2} = 4x(1-x^2), \quad x \in [0, 1]. \quad (18)$$

Η υπό συνθήκη πυκνότητα της X δεδομένου $Y = y$ είναι, για $0 \leq x \leq y$,

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{8xy}{4y^3} = \frac{2x}{y^2}, \quad (19)$$

δηλαδή η $X | Y = y$ έχει πυκνότητα ανάλογη του x στο $[0, y]$. Επομένως,

$$\mathbb{E}[X | Y = y] = \int_0^y x \frac{2x}{y^2} \, dx = \frac{2}{y^2} \frac{y^3}{3} = \frac{2y}{3}, \quad (20)$$

δηλαδή $\mathbb{E}[X | Y] = \frac{2Y}{3}$.

γ') Να υπολογίσετε τη συνδιακύμανση $\text{Cov}[X, Y]$. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε.

Υπολογίζουμε τις μέσες τιμές των X και Y από τις περιθώριες πυκνότητες $f_X(x) = 4x(1-x^2)$ και $f_Y(y) = 4y^3$ του προηγούμενου ερωτήματος:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x 4x(1-x^2) \, dx = 4 \int_0^1 (x^2 - x^4) \, dx = 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{15}, \quad (21)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y 4y^3 \, dy = \frac{4}{5}. \quad (22)$$

Τη μέση τιμή του γινομένου την υπολογίζουμε με διπλή ολοκλήρωση της από κοινού πυκνότητας πάνω στο τρίγωνο $\{0 \leq x \leq y \leq 1\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \int_0^1 \int_0^y xy \cdot 8xy \, dx \, dy = \int_0^1 8y^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^y dy \\ &= \int_0^1 \frac{8}{3} y^5 \, dy = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{9}. \end{aligned} \quad (23)$$

Άρα

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y] = \frac{4}{9} - \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{9} - \frac{32}{75} = \frac{100 - 96}{225} = \frac{4}{225}. \quad (24)$$

Οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες. Ο λόγος είναι ότι $\text{Cov}[X, Y] = \frac{4}{225} \neq 0$, και η μηδενική συνδιακύμανση είναι αναγκαία συνθήκη για ανεξαρτησία.

Πληροφορίες

- Πριν την έναρξη, παραδώστε σημειώσεις, βιβλία, κινητά τηλέφωνα, έξυπνα ρολόγια, έξυπνα γυαλιά και κάθε άλλο ηλεκτρονικό βοήθημα. Σε περίπτωση μη συμμόρφωσης, το διαγώνισμα μηδενίζεται αυτομάτως.
- Δίνονται συνολικά 110 μονάδες, το μέγιστο σκορ είναι 100.
- Η διάρκεια του διαγωνίσματος είναι 120 λεπτά.
- Αιτιολογήστε καθαρά τις απαντήσεις σας. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν θεωρούνται σωστές.
- Γράψτε μόνο ό,τι γνωρίζετε με βεβαιότητα και μπορείτε να τεκμηριώσετε. Μην μαντεύετε. Ασαφείς ή τυχαίες απαντήσεις και λανθασμένοι ισχυρισμοί αφαιρούν μονάδες. Είναι προτιμότερο να αφήσετε ένα ερώτημα ημιτελές παρά να γράψετε εσφαλμένα ή άσχετα βήματα.
- Λύστε τα θέματα στο πρόχειρο και παρουσιάστε τις τελικές λύσεις καθαρογραμμένες. Απαντήσεις με μουντζούρες δεν θα βαθμολογούνται.
- Δώστε συγκεντρωμένες απαντήσεις για κάθε άσκηση. Αν προχωρήσετε στην επόμενη χωρίς να έχετε ολοκληρώσει την προηγούμενη, αφήστε επαρκή κενό χώρο σε περίπτωση που θέλετε να επιστρέψετε.